

Colección “Matemática Educativa y Tecnología”

**APLICACIONES SOBRE LA
MODELACIÓN, LA
VISUALIZACIÓN Y USO DE
REPRESENTACIONES EN LA ERA
NUMÉRICA**

Editores:

Dávila Araiza , María Teresa

Romero Félix, César Fabián

Hitt, Fernando

Colección: Matemática Educativa y Tecnología

Editores de la colección:

Fernando Hitt Espinosa

José Carlos Cortés Zavala

Comité Editorial

María Teresa Dávila Araiza

Universidad de Sonora

México

César Fabián Romero Félix

Universidad de Sonora

México

Fernando Hitt Espinosa

Université du Québec à Montréal

Canada.

Primera edición: 20 de noviembre de 2023

Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y
uso de representaciones en la era numérica

Dávila Araiza, M.T., Romero Félix C.F y Hitt, F.
(Eds.)

México: Editorial AMIUTEM

(Colección Matemática Educativa y Tecnología)

ISBN: 978-607-98603-3-2

Prólogo

Irene Vallejo, la joven promesa de la literatura Española, en su libro “El Infinito en un Junco” inicia su obra diciendo:

“Misteriosos grupos de hombres a caballo recorren los caminos de Grecia. Los campesinos los observan con desconfianza desde sus tierras o desde las puertas de sus cabañas. La experiencia les ha enseñado que solo viaja la gente peligrosa: soldados, mercenarios y traficantes de esclavos. Arrugan la frente hasta que los ven hundirse otra vez en el horizonte. No les gustan los forasteros armados.

Los jinetes cabalgan sin fijarse en los aldeanos. Para cumplir su tarea deben aventurarse por los violentos territorios de un mundo en guerra casi permanente”

Más adelante nos informa, que esa tarea que deben cumplir, y que fue un encargo del Rey de Egipto (Ptolomeo III), es buscar Libros, todo tipo de libros y que serán almacenados en la gran Biblioteca de Alejandría.

Irene menciona “La invención de los libros ha sido tal vez el mayor triunfo en nuestra terca lucha contra la destrucción”.

Quise retomar la visión de Irene Vallejo como el inicio del prólogo, para reafirmar que cada libro que se escribe es importante para la humanidad. Así que mi querido lector, todos los autores de este material te agradecemos por haber abierto estas paginas y esperamos que encuentres en este libro beneficios.

El libro “*Aplicaciones sobre la modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica*” es la parte práctica del libro anterior llamado “*Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica*”, por lo que es conveniente retomar lo escrito por Esnel Pérez, autor del prólogo del libro “*Modelación, la visualización y uso de representaciones en la era numérica*”. Pérez menciona lo siguiente:

“El título mismo, *Modelación, Visualización y Representaciones en la Era Numérica*, me llevó a preguntarme ¿cuál es la significación que a partir de la lectura del texto habría de encontrar para tal expresión?

El título me permitió suponer que el contenido está articulado sobre tres grandes ejes de discusión, importantes por demás en Educación Matemática: Modelación, Visualización y Representaciones; que, si bien son distinguibles uno del otro, no se excluyen mutuamente; además de un cuarto eje, el uso de tecnología (designado implícitamente por la expresión “En la Era Numérica”), que se entrecruza con los tres primeros.”

En este nuevo libro encontrarás algunas aplicaciones de las temáticas tratadas en el volumen anterior. Se compone de quince capítulos y cada uno de ellos se desarrolla proponiendo una actividad de aprendizaje.

En el capítulo uno, Del Castillo, Ibarra y Armenta desarrollan una secuencia didáctica o actividad para el aula partiendo de una situación cotidiana la Señalización de protección civil. Mencionan

“La estructura de la secuencia didáctica incluye actividades de apertura, desarrollo y cierre, acorde al planteamiento de Díaz-Barriga (2013), y es consistente con los planes y programas vigentes del bachillerato en México (SEP, 2017). Para el desarrollo de la secuencia se han incluido momentos de trabajo individual, en equipos y grupal. La reflexión individual, las interacciones con el grupo y con el profesor son importantes para promover los momentos de argumentación y la negociación de los significados construidos.

Boissinotte, en el capítulo dos propone una actividad para encontrar el mejor costo para instalar un cable, menciona “Nuestro objetivo es lograr que los estudiantes (futuros profesores de secundaria) reconozcan el potencial de Modelado 3D producido en software de geometría dinámica para resolver ciertos Problemas que involucran visualización espacial”. Recomienda, como metodología de trabajo, ACODESA¹ y propone su actividad a través de seis bloques.

Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones es el capítulo tres, los autores, Soto, Urrea Bernal y Romero hacen uso del GeoGebra para tratar las operaciones entre vectores, proponen tres secuencias didácticas donde cada una de ellas se compone de actividades para el aula.

En capítulo cuatro, escrito por Martínez y Olvera, proponen una actividad relacionada con las horas de luz solar, con esta actividad mencionan que pretenden “Que los estudiantes generen un modelo matemático de un contexto real sobre la duración de luz solar con datos que se pueden recuperar en una base que se actualizan en tiempo real. El contexto propuesto es propicio para promover el estudio de fenómenos reales que involucra periodicidad, por lo que la actividad promueve el estudio de la función seno y/o coseno a través de diferentes representaciones. La actividad se compone de cuatro momentos y cada momento es tratado a través de preguntas.

Modelizar el movimiento uniforme apoyados con un sensor de movimiento para obtener un acercamiento a la función lineal y que los estudiantes comprendan que: la gráfica distancia/tiempo que da el sensor es una representación del movimiento. Es la propuesta de Hernández, Santillán y Pérez y para ello proponen cuatro actividades que son presentadas en el capítulo cinco.

Dando continuidad al capítulo anterior en el capítulo seis los mismos autores proponen otra actividad llamada “Gráficas dinámicas ligadas”, ahí proponen tres actividades que tienen como objetivo descubrir relaciones entre la gráfica de d/t y la de v/t , manipulando la gráfica.

En el capítulo siete Grijalva y Dávila proponen dos actividades didácticas que pretenden apoyar el estudio de la integral mediante el desarrollo de procesos de visualización. Las actividades diseñadas tienen como propósito promover, como punto de partida, el significado de integral como función de área, no el de integral definida como valor fijo correspondiente al área de una región estática.

Zaldívar Rojas y Vega Herrera son los encargados de la escritura del capítulo ocho, en el cual se desarrollan diez actividades para promover el uso de gráficas en la solución de sistemas de ecuaciones lineales con las cuales intentan promover la visualización matemática.

¹ ACODESA: Aprendizaje Colaborativo, Debate Científico y Autoreflexión

Romero continua, en el capítulo nueve, con actividades para promover la visualización para encontrar raíces de funciones a través del método de Bisección y del Newton-Raphson. La propuesta incluye dos actividades, organizadas en tres etapas cada una: problema inicial, discusión grupal y ejercicios.

El capítulo diez, escrito por Ibarra y Montiel presenta la situación de estimar la temperatura. Esta actividad se desarrolla en tres etapas y tiene como objetivo que los y las profesoras participantes realicen estimaciones acerca de las temperaturas entre dos ciudades a fin de promover el análisis e interpretación geométrica del Teorema de Tales.

Las mismas autoras proponen, en el capítulo once, una actividad sobre Antenas telefónicas como un medio para conceptualizar la mediatriz.

Que los estudiantes aprendan a construir estructuras cognitivas y que ligen los procesos algebraicos en papel y lápiz, junto con los visuales con la ayuda de la geometría dinámica y el Cas de GeoGebra, es el objetivo de la propuesta que desarrolla Hitt en el capítulo doce. Es una actividad que se implementa en el aula utilizando la metodología ACODESA.

Guarín, Parada Rico y Fiallo son los autores de Capítulo trece que lleva por nombre “Nociones de aproximación y Tendencia”. Para los autores una mejor comprensión del concepto de límite de una función en un punto es el que los estudiantes tengan idea de lo que es una aproximación y una tendencia. El Capítulo se desarrolla a través de cinco actividades en las cuales se hace uso de un applet realizado en GeoGebra.

En los Capítulos catorce y quince se trabaja la generalización algebraica, en el aprendizaje formal de álgebra. Hitt y Saboya presentan una actividad denominada “El jardín de calabazas” y Hitt y Quiroz proponen la actividad “Rectángulos y círculos”. En ambas actividades se emplea la metodología ACODESA, por lo que se desarrolla la actividad en cinco etapas. En cada una de las actividades se utiliza un applet de GeoGebra.

Así que, estimado lector, esperamos que las actividades presentadas en este volumen te sean de utilidad, es importante aclarar que la editorial AMIUTEM² no persigue fines de lucro, por lo cual los libros editados bajo este sello son de libre circulación y completamente Gratis.

Como parte final de este prologo, recordarte que AMIUTEM es una Asociación formada por profesores de matemáticas de diferentes niveles educativos y que uno de los objetivos sociales que persigue es el de promover el uso de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas, por lo que ponemos este material en tus manos para que nos ayudes con esta labor.

Morelia, México

José Carlos Cortés Zavala

² Asociación Mexicana de Investigadores en el Uso de Tecnología para la Enseñanza de las Matemáticas.

Contenido

Capítulo 1: Señalización para Protección Civil	1
Ana Guadalupe del Castillo B., Silvia E. Ibarra O., Maricela Armenta C.	
Capítulo 2: Activité pour les futurs enseignants de mathématiques : Recherche du meilleur coût pour l'installation d'un câble	29
Christian Boissinotte	
Capítulo 3: Actividades sobre el uso de las operaciones entre vectores para la parametrización de superficies en tres dimensiones	49
José Luis Soto Munguía, Manuel Alfredo Urrea Bernal, César Fabián Romero Félix.	
Capítulo 4: Horas de luz solar	63
Cesar Martínez Hernández, María del Carmen Olvera Martínez.	
Capítulo 5: Caminando frente al sensor de movimiento	73
Armando Hernández Solís, Marco Antonio Santillán Vázquez, Héctor Pérez Aguilar.	
Capítulo 6: Gráficas dinámicas ligadas	83
Armando Hernández Solís, Marco Antonio Santillán Vázquez, Héctor Pérez Aguilar.	
Capítulo 7: Actividades para la exploración gráfica de la integral y sus propiedades elementales	91
Agustín Grijalva Monteverde, María Teresa Dávila Araiza.	
Capítulo 8: Sistemas de Ecuaciones Lineales con dos incógnitas a través de la Visualización	101
José David Zaldívar Rojas, Beatriz Adriana Vega Herrera.	
Capítulo 9: Visualización de métodos numéricos para aproximar raíces de funciones	125
César Fabián Romero Félix	
Capítulo 10: Situación 1: Estimando la temperatura	149
María Antonieta Rodríguez Ibarra, Gisela Montiel Espinosa.	
Capítulo 11: Antenas telefónicas	162
María Antonieta Rodríguez Ibarra, Gisela Montiel Espinosa.	
Capítulo 12: Visualización matemática y GeoGebra	173
Fernando Hitt	
Capítulo 13: Nociones de Aproximación y Tendencia	179
Sergio Alexander Guarín Amorocho, Sandra Evely Parada Rico, Jorge Enrique Fiallo Lea.	
Capítulo 14: Le Jardin des Citrouilles	187

Fernando Hitt, Mireille Saboya.

Capítulo 15: Rectángulos y círculos

199

Samantha Quiroz Rivera, Fernando Hitt.

Capítulo 6: Gráficas dinámicas ligadas

Secuencia didáctica

Armando Hernández Solís, Marco Antonio Santillán Vázquez, Héctor Pérez Aguilar. ¹

Problemática y propósitos de aprendizaje

Modelizamos el movimiento uniforme apoyados con gráficas dinámicas ligadas.

El objetivo es descubrir relaciones entre la gráfica de d/t y la de v/t , manipulando la gráfica.

Trabajando en este ambiente se consolidan relaciones y significados de pendiente, velocidad, distancia, área, continuidad-discontinuidad.

Conceptos matemáticos involucrados

Generales: Variación, modelación matemática, representaciones gráfica.

Específicos: Función lineal, gráficas de funciones de segmentos rectilíneos, pendiente, velocidad, relación entre variación y acumulación.

Nivel de estudios

Primer semestre de bachillerato (15 a 16 años).

Total de actividades y duración aproximada

4 actividades, que se realizan en un total de 90 minutos.

Materiales necesarios

- GeoGebra
- Applet de gráficas dinámicas ligadas.

Método o recomendaciones de enseñanza

Se diseñan las actividades bajo el concepto de Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) (Simon, 1995; Simon & Tzur, 2004). En una THA se tiene un objetivo, una meta, una ruta a seguir para lograrla desde los conocimientos que se tienen. Al final es necesario utilizar los nombres de los puntos y segmentos que.

Para Hernández & Santillán (2017), en las gráficas dinámicas ligadas (GDL), se comparte el tiempo, es el mismo para la gráfica de distancia, y para la gráfica de velocidad.

- **Actividad 1:** El profesor explica el funcionamiento de las gráficas dinámicas ligadas, y posteriormente deja que los estudiantes las exploren, para que encuentren relaciones entre segmentos de la gráfica de distancia con segmentos de la gráfica de velocidad.

¹ CCH-UNAM, México.

- **Actividad 2:** Describir qué sucede en la gráfica v/t , si dos segmentos se alinean en la gráfica d/t ; relacionar un pico en la gráfica d/t con una discontinuidad en la gráfica v/t .
- **Actividad 3.** Justificar que el área del rectángulo en la gráfica de v/t , es la distancia recorrida. Se debe observar una relación de dependencia visual, donde al aumentar una aumenta la otra. Otra justificación es que al trabajar las unidades físicas, el área del rectángulo es base por altura, la base = tiempo (s), la altura = velocidad (m/s), pero también $d = v t$, obteniendo la unidad de (m) como resultado.

Referencias

Hernández, A. & Santillán, M. A. (2017). Construcción de relaciones gráficas intuitivas en el estudio de la variación y la acumulación apoyadas con tecnología digital. *VIII CIBEM 2017*, CB-892 (pp. 665-677). Madrid: Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.

Simon, M. A. & Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.

Actividad 1: Relacionando segmentos de la gráfica de distancia con los de velocidad

Nombre: _____ Grupo: _____ Fecha: _____

INSTRUCCIONES

Contesta las preguntas y realiza lo que se solicita en cada una de las actividades de tus hojas de trabajo.

Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Individual, 30 minutos



6. Manipula la aplicación de gráficas dinámicas ligadas, moviendo los puntos B, C, D y E. ¿Qué observas? Explica ampliamente.

7. Si un segmento de la gráfica de distancia tiene pendiente positiva, dibuja ese segmento.

8. Con respecto a la pregunta 2, el segmento correspondiente en la gráfica de velocidad, ¿dónde está?, ¿arriba, abajo o sobre el eje del tiempo? ¿Por qué?

Gráficas dinámicas ligadas

4. Si un segmento de la gráfica de distancia tiene pendiente cero, dibuja ese segmento.



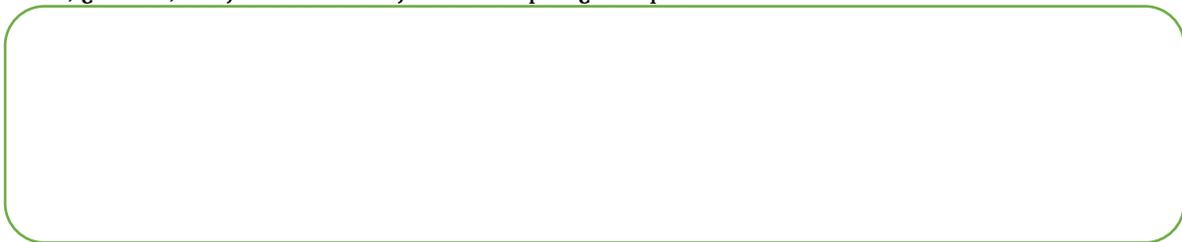
5. Con respecto a la pregunta 4, el segmento correspondiente en la gráfica de velocidad, ¿dónde está?, ¿arriba, abajo o sobre el eje del tiempo? ¿Por qué?



6. Si un segmento de la gráfica de distancia tiene pendiente negativa, dibuja ese segmento.



7. Con respecto a la pregunta 6, el segmento correspondiente en la gráfica de velocidad, ¿dónde está?, ¿arriba, abajo o sobre el eje del tiempo? ¿Por qué?



Actividad 2: Alineando segmentos

Nombre: _____ Grupo: _____ Fecha: _____

INSTRUCCIONES

Contesta las preguntas y realiza lo que se solicita en cada una de las actividades de tus hojas de trabajo.

Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Individual, 30 minutos



1. Si un segmento en la gráfica de distancia se mueve para colocarse horizontalmente, ¿Qué sucede al segmento correspondiente en la gráfica de velocidad?

2. Explica por qué sucede lo anterior.

3. Observa cualquiera de los picos en la gráfica de distancia. ¿Qué asocias con el pico en la gráfica de velocidad?

4. Describir qué sucede en la gráfica de velocidad, si dos segmentos adyacentes se alinean en la gráfica de distancia.

Gráficas dinámicas ligadas



5. ¿Qué le paso al pico que formaban ambos segmentos?



6. ¿Cómo explicas lo anterior?



Actividad 3: Área y distancia

Nombre: _____ Grupo: _____ Fecha: _____

INSTRUCCIONES

Contesta las preguntas y realiza lo que se solicita en cada una de las actividades de tus hojas de trabajo.

Registra siempre tus respuestas en tus hojas de trabajo, aunque hayas trabajado en equipo.

Individual, 30 minutos



1. En la gráfica de distancia, arrastra el punto B para que el tiempo t_1 , o longitud del intervalo $O'R$ aumente. ¿Qué sucede con el área debajo del segmento PT , es decir el área del rectángulo $O'RTP$. ¿Aumenta o disminuye?

2. En la gráfica de distancia, la distancia recorrida desde O (tiempo cero) hasta t_1 , ¿aumenta o disminuye?

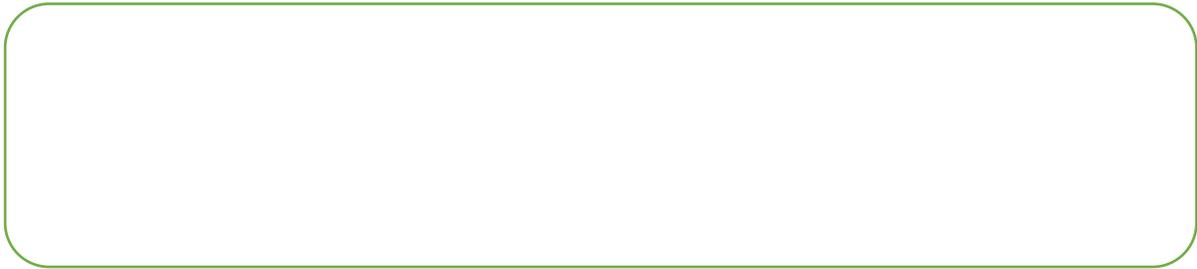
3. En la gráfica de distancia, arrastra el punto B para que la altura del rectángulo $O'RTP$ aumente. ¿Qué sucede con el área debajo del segmento PT , es decir el área del rectángulo $O'RTP$, aumenta o disminuye?

Gráficas dinámicas ligadas

4. En la gráfica de distancia, la distancia recorrida con esta nueva altura, ¿aumenta o disminuye?



5. Si calculas el área del rectángulo O'RTP en la gráfica de velocidad, como la base por la altura, al multiplicar las unidades físicas $s \left(\frac{m}{s}\right)$, ¿Qué unidades se obtienen?



6. Si O'R es nuevamente el tiempo transcurrido desde un tiempo cero hasta t_1 , ¿cómo es el área del rectángulo O'RTP, comparada con la distancia recorrida desde el tiempo inicial cero hasta t_1 ?

